ΟΡΙΣΜΟΣ:

Μια απεικόνιση $\varphi: G \to G'$ είναι ισομορφισμός ($G \cong G'$) αν η φ είναι ομομορφισμός, 1-1 και επί.

Ομομορφισμός αν $\forall x,y \in G$: $\varphi(x \cdot_G y) = \varphi(x) \cdot_{G'} \varphi(y)$

Παράδειγμα #1

Έστω $\varphi: (\mathbb{R},+) \to (\mathbb{R}^+, \cdot)$ όπου $\varphi(x) = e^x$

φ ομομορφισμός αφού $\forall x,y \in G = \mathbb{R}$:

$$\varphi(x+y) = e^{x+y} = e^x \cdot e^y = \varphi(x)\cdot\varphi(y)$$

Έτσι για τα "σκακιέρα"

είχαμε δει ότι η $\varphi: G \to G'$ 1-1 και επί, όπου

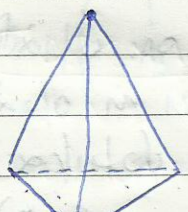
$Id \mapsto e$, $r \mapsto a$, $q_1 \mapsto b$, $q_2 \mapsto c$.

Έπειτα δ.δ. φ ομομορφισμός, δηλ. δ.δ. $q_1 \cdot q_2 \in G = D_6$: $\varphi(q_1 q_2) = \varphi(q_1)\varphi(q_2)$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Έτσι, } \varphi(q_1 \cdot q_2) = \varphi(r) = a \\ \text{από την άλλη } \varphi(q_1)\cdot\varphi(q_2) = bc = a \end{array}\right\} \text{ίσα}$$

όμοια και οι άλλοι (δηλ. $\binom{4}{2}$ έλεγχοι)

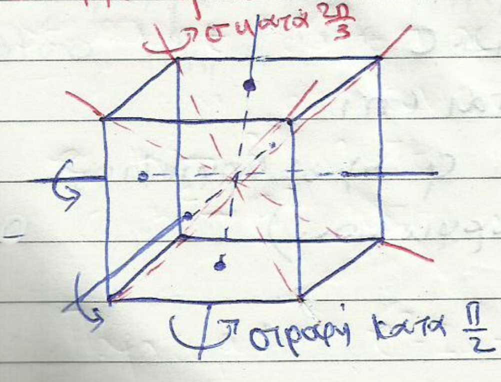
Παράδειγμα #2:



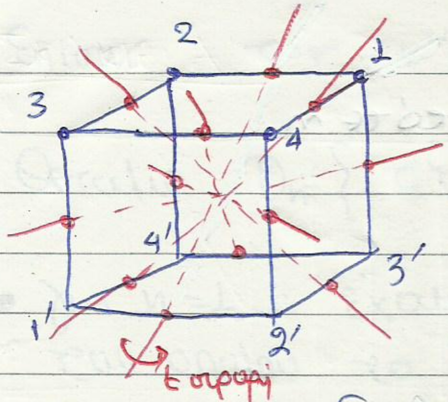
συμμετρίες σε κανονικό τετράεδρο

$G \cong A_4$

Συμμετρίες του Κύβου:



- 3 στροφές + 1 ταυτοτική (3 άξονες περιστροφών) → επίπεδο σε επίπεδο
- 2 στροφές + 1 ταυτοτική (4 άξονες περιστροφών) → κορυφή σε κορυφή



t στροφή (1 συνολικά + 1 ταυτοτική)
Συμβολίζουμε με N_k τις διαγωνίους που συνδέουν τις κορυφές k, k' όπου $1 \leq k \leq 4$.
Κάθε περιστροφική συμμετρία, μετακινεί τις N_1, N_2, N_3, N_4

Για παράδειγμα, $N_1 \to N_2$, $N_2 \to N_3$, $N_3 \to N_4$, $N_4 \to N$ για μια r στροφή κατά $\frac{\pi}{2}$. (Δηλ. $(1,2,3,4)$)
Έτσι, η t: $N_1 \longleftrightarrow N_2$, $N_3 \to N_3$, $N_4 \to N_4$ (Δηλ. $(1,2)$)

ΘΕΩΡΗΜΑ

Η αντιμετάθεση $(1,2)$ και ο κύκλος $(1,2,\dots,n)$ παράγουν την S_n (Δηλ: $S_n = \langle (1,2),(1,2,\dots,n) \rangle$).

Άρα, τα στοιχεία $(1,2)$ $(1,2,3,4)$ παράγουν την S_4 αν ορίσουμε τώρα $\varphi: G$ (ομάδα συμμετριών του κύβου) $\to S_4$

Έτσι, $\sigma: 8$, $t: 6$, $r = 9$ + ταυτοτική $\Longrightarrow$ 24 συνολικά συμμετρίες

(μοναδική ανάλυση)

Άρα, εφόσον $(1,2)(1,2,3,4) \in \varphi(G) \leq S_4 \Longrightarrow \boxed{\varphi(G) = S_4} \Longrightarrow$
$\Longrightarrow \varphi$ είναι επί. Επίσης, φ 1-1 όπως $|G| = |S_4| = 24$
τέλος, η φ ομομορφισμός. Άρα, $G \cong S_4$

ΘΕΩΡΗΜΑ

1) Η ομάδα περιστροφικών συμμετριών του κανονικού τετραέδρου είναι $\cong A_4$
2) Η ομάδα περιστροφικών συμμετριών του κανονικού κύβου (και του οκταέδρου) είναι $\cong S_4$
3) Οι περιστροφικές ομάδες συμμετριών του κανονικού δωδεκαέδρου (και του εικοσαέδρου) είναι $\cong A_5$.

ΘΕΩΡΗΜΑ (Cayley)

Έστω G: πεπερασμένη ομάδα τάξης n, τότε η $G \cong$ με μια υποομάδα της S_n

Να θυμηθούμε ότι:

$$D_n = \{Id, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, rs, r^2 s, \dots, r^{n-1}s\}$$

όπου $r^n = s^2 = Id$, $r^{n-1} = r^{-1}$, $sr = r^{n-1} \cdot s$. Για παράδειγμα:

$$sr^2 = (sr) \cdot r = (r^{n-1} \cdot s) r = r^{n-1}(sr) = r^{n-1} \cdot r^{n-1} s =$$
$$= r^n \cdot r^{n-2} \cdot s = r^{n-2} \cdot s$$

Όπου $\{Id, r, r^2, \dots, r^{n-1}\} \leq D_n$, κυκλική

ΟΡΙΣΜΟΣ:

Οι στροφές (στη D_n) δημιουργούν μια (κανονική) υποομάδα αυτής (της D_n) η οποία καλείται κυκλική ομάδα συμμετρίας (συμβολισμός C_n)

Έτσι, $C_n = \langle r \rangle \leq D_n$

ΘΕΩΡΗΜΑ (Leonardo)

Οι μοναδικές πεπερασμένες ομάδες συμμετριών είναι οι κυκλικές ομάδες C_n και οι διεδρικές ομάδες D_n

ΠΟΡΙΣΜΑ:

Η ομάδα συμμετρίας ενός πολυγώνου είναι είτε η κυκλική είτε η διεδρική

Μια διαφορετική γραφή αυτών:

Θεωρούμε το επίπεδο $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\}$ και ορίζουμε τις εξής απεικονίσεις

$\tau: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ώστε $(x,y) \longmapsto (-x,y)$ (ανάκλαση ως προς τον yy')

$r: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ώστε $r(x,y) = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{n} & -\sin\frac{2\pi}{n} \\ \sin\frac{2\pi}{n} & \cos\frac{2\pi}{n} \end{pmatrix}}_{\sim R_{\frac{2\pi}{n}}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Παρατηρούμε $\tau^2 = Id = r^n$

Επίσης, $\tau \circ r = r^{-1} \circ \tau = r^{n-1} \circ \tau$

Οπότε $D_n = \{ \tau^i \cdot r^j \in S_{\mathbb{R}^2} \} = \{ r, r^2, r^3, \tau r, \tau \dots \}$

- για $n=1$: έχουμε τις συμμετρίες ενός ευθ. τμήμ. $// xx'$ του οποίου το μέσο βρίσκεται στον yy'. Ουσιαστικά, έχουμε συμμετρίες ισοσκελούς και <u>όχι</u> ισοπλεύρου τριγώνου
- για $n=2$: έχουμε συμμετρίες ορθογ. παραλληλογράμμου.
- για $n=3$: συμμετρίες ισόπλευρου τριγώνου
- για $n=4$ //   //   τετραγώνου